ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG THỊ VẦN

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ HỘI TỤ MẠNH GIẢI BÀI TOÁN ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG TÁCH TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
1. TS. Trương Minh Tuyên
2. TS. Phạm Hồng Trường

THÁI NGUYÊN - 2020

Lời cảm ơn

Tác giả xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới TS. Trương Minh Tuyên người thầy đã luôn tận tình hướng dẫn, chỉ bảo và giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và hoàn thiện luận văn.

Đồng thời, tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn đến các thầy, cô trong khoa Toán–Tin, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã giúp đỡ, tạo điều kiện cho tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại Trường.

Cuối cùng tác giả xin chân thành cảm ơn tới người thân trong gia đình, bạn bè và đồng nghiệp đã luôn động viên tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong suốt quá trình học tập và viết luận văn này.

Mục lục

Một số ký hiệu và viết tắt

$\langle .,. \rangle$	tích vô hướng trên không gian Hilbert H
$\|.\|$	chuẩn trên không gian Hilbert H
$\cup$	phép hợp
$\cap$	phép giao
$\mathbb{R}_+$	tập các số thực không âm
$G(A)$	đồ thị của toán tử A
$D(A)$	miền xác định của toán tử A
$R(A)$	miền ảnh của toán tử A
A^{-1}	toán tử ngược của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	với mọi x
$x_n \longrightarrow x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0

Mở đầu

Cho C và Q là các tập con lồi, đóng và khác rỗng của các không gian Hilbert H_1 và H_2, tương ứng. Cho $T: \ H_1 \longrightarrow H_2$ là một toán tử tuyến tính bị chặn. Bài toán *chấp nhận tách* (SFP-Split Feasibility Problem) có dạng như sau:

$$\text{Tìm một phần tử } x^* \in C \cap T^{-1}(Q). \tag{0.1}$$

Một dạng tổng quát của Bài toán (0.1) là bài toán *chấp nhận tách đa tập* (MSSFP-Multiple sets Split Feasibility Problem), bài toán này được phát biểu như sau: Cho C_i, $i = 1, 2, ..., N$ và Q_j, $j = 1, 2, ..., M$ là các tập con lồi và đóng của H_1 và H_2 tương ứng.

$$\text{Tìm một phần tử} \quad x^* \in \cap_{i=1}^{N} C_i \cap T^{-1}(\cap_{j=1}^{M} Q_j) \neq \emptyset. \tag{0.2}$$

Mô hình bài toán (SFP) lần đầu tiên được giới thiệu và nghiên cứu bởi Y. Censor và T. Elfving [5] cho mô hình các bài toán ngược. Bài toán này đóng vai trò quan trọng trong khôi phục hình ảnh trong Y học, điều khiển cường độ xạ trị trong điều trị bệnh ung thư, khôi phục tín hiệu (xem [3], [4]) hay có thể áp dụng cho việc giải các bài toán cân bằng trong kinh tế, lý thuyết trò chơi.

Bài toán chấp nhận tách (0.1) là một trường hợp đặc biệt của bài toán điểm bất động chung tách. Dạng tổng quát của bài toán điểm bất động chung tách được phát biểu như sau: Cho $T_i: \ H_1 \longrightarrow H_1$, $i = 1, 2, ..., N$ và $S_j: \ H_2 \longrightarrow H_2$, $j = 1, 2, ..., M$ là các ánh xạ không giãn trên H_1 và H_2, tương ứng.

$$\text{Tìm phần tử} \quad x^* \in \cap_{i=1}^{N} \operatorname{Fix}(T_i) \cap T^{-1}\big(\cap_{j=1}^{M} \operatorname{Fix}(S_j)\big) \neq \emptyset. \tag{0.3}$$

Thời gian gần đây, lớp các Bài toán (0.3) đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước. Năm 2019, các tác giả Reich S. và

Tuyen T.M. đã đưa ra một phương pháp lặp mới dựa trên phương pháp chiếu lai ghép (Hybrid projection method) để giải Bài toán (0.3) (xem [8, Định lý 4.2]).

Mục đích của luận văn này là trình bày chứng minh chi tiết cho Định lý 4.2 trong [8] và trình bày lại một kết quả của tác giả Ha M.T.N. về phương pháp chiếu co hẹp [6] để xấp xỉ một nghiệm của Bài toán (0.3) cho trường hợp $M = N = 1$.

Nội dung của luận văn được chia làm hai chương chính:

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, luận văn đề cập đến một số đặc trưng cơ bản của không gian Hilbert, phép chiếu mêtric, ánh xạ không giãn cùng các phương pháp chiếu lai ghép hay chiếu co hẹp để tìm điểm bất động cho lớp ánh xạ này. Mục cuối cùng của chương này đề cập đến khái niệm toán tử đơn điệu và một số tính chất cơ bản.

Chương 2. Hai phương pháp chiếu giải bài toán điểm bất động chung tách

Chương này tác giả trình bày chứng minh chi tiết cho Định lý 4.2 trong [8] và trình bày lại kết quả của tác giả Ha M.T.H. trong [6]. Ngoài ra, bằng cách sử dụng tính chất điểm bất động của ánh xạ trung bình hay tính chất của toán tử giải đối với toán tử đơn điệu, tác giả cũng đưa ra một số phương pháp giải Bài toán (0.3) và bài toán không điểm chung tách.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này bao gồm ba mục chính. Mục 1.1 đề cập đến một số đặc trưng cơ bản của không gian Hilbert thực, Mục 1.2 giới thiệu sơ lược một số kết quả về ánh xạ không giãn, cùng với các phương pháp chiếu lai ghép và chiếu thu hẹp tìm điểm bất động cho lớp ánh xạ này. Mục 1.3 trình bày một số khái niệm và tính chất cơ bản về toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert. Nội dung của chương này phần lớn được tham khảo từ các tài liệu [1] và [2].

1.1. Một số đặc trưng của không gian Hilbert

Ta luôn giả thiết H là không gian Hilbert thực với tích vô hướng được kí hiệu là $\langle .,. \rangle$ và chuẩn được kí hiệu là $\|.\|$.

Mệnh đề 1.1. *Trong không gian Hilbert thực H ta luôn có đẳng thức sau*

$$\|x-y\|^2 + \|x-z\|^2 = \|y-z\|^2 + 2\langle x-y, x-z\rangle,$$

với mọi $x, y, z \in H$.

Chứng minh. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
\|y-z\|^2 + 2\langle x-y, x-z\rangle &= \langle y,y\rangle + \langle z,z\rangle + 2\langle x,x\rangle - 2\langle x,z\rangle - 2\langle x,y\rangle \\
&= [\langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle] \\
&\quad + [\langle x,x\rangle - 2\langle x,z\rangle + \langle z,z\rangle] \\
&= \|x-y\|^2 + \|x-z\|^2.
\end{aligned}$$

Vậy ta được điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 1.2. *Cho H là một không gian Hilbert thực. Khi đó, với mọi $x, y \in H$ và mọi $\lambda \in [0, 1]$, ta có*

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2. \tag{1.1}$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 &= \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle x, y\rangle + (1-\lambda)^2\|y\|^2 \\ &= \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)(\|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2) \\ &= \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2.\end{aligned}$$

Ta được điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 1.3. *Cho H là một không gian Hilbert thực. Khi đó, nếu với $x, y \in H$ thỏa mãn điều kiện*

$$|\langle x, y\rangle| = \|x\|.\|y\|,$$

tức là bất đẳng thức Schwars xảy ra dấu bằng thì hai véc tơ x và y là phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh. Giả sử ngược lại rằng $x \neq \lambda y$ với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$. Khi đó, từ tính chất của tích vô hướng, ta có

$$0 < \|x - \lambda y\|^2 = \lambda^2\|y\|^2 - 2\lambda\langle x, y\rangle + \|x\|^2,$$

với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$. Ta thấy rằng nếu $y = 0$, thì hiển nhiên x và y là phụ thuộc tuyến tính. Giả sử $y \neq 0$, khi đó với $\lambda = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$, thì bất đẳng thức trên trở thành

$$|\langle x, y\rangle| < \|x\|.\|y\|,$$

điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy x và y là phụ thuộc tuyến tính.
Mệnh đề được chứng minh. □

Nhắc lại rằng, dãy $\{x_n\}$ trong không gian Hilbert H được gọi là hội tụ yếu về phần tử $x \in H$, nếu

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle,$$

với mọi $y \in H$. Từ tính liên tục của tích vô hướng, suy ra nếu $x_n \to x$, thì $x_n \rightharpoonup x$. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng. Chẳng hạn xét không gian $l^2 = \big\{\{x_n\} \subset \mathbb{R} :\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\big\}$ và $\{e_n\} \subset l^2$, được cho bởi

$$e_n = (0, ..., 0, \underset{\text{vị trí thứ n}}{1}, 0, ..., 0, ...),$$

với mọi $n \geq 1$. Khi đó, $e_n \rightharpoonup 0$, khi $n \to \infty$. Thật vậy, với mỗi $y \in H$, từ bất đẳng thức Bessel, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, y\rangle|^2 \leq \|y\|^2 < \infty.$$

Suy ra $\lim_{n\to\infty}\langle e_n, y\rangle = 0$, tức là $e_n \rightharpoonup 0$. Tuy nhiên, $\{e_n\}$ không hội tụ về 0, vì $\|e_n\| = 1$ với mọi $n \geq 1$.

Ta biết rằng mọi không gian Hilbert H đều thỏa mãn điều kiện của Opial, tính chất này được thể hiện trong mệnh đề dưới đây:

Mệnh đề 1.4. *Cho H là một không gian Hilbert thực và $\{x_n\} \subset H$ là một dãy bất kỳ thỏa mãn điều kiện $x_n \rightharpoonup x$, khi $n \to \infty$. Khi đó, với mọi $y \in H$ và $y \neq x$, ta có*

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|. \tag{1.2}$$

Chứng minh. Vì $x_n \rightharpoonup x$, nên $\{x_n\}$ bị chặn.

Ta có

$$\|x_n - y\|^2 = \|x_n - x\|^2 + \|x - y\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y\rangle.$$

Vì $x \neq y$, nên

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|^2 &> \liminf_{n\to\infty}(\|x_n - x\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y\rangle)\\ &= \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2.\end{aligned}$$

Do đó, ta nhận được

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|.$$

Mệnh đề được chứng minh. $\square$

Mệnh đề 1.5. *Mọi không gian Hilbert thực H đều có tính chất Kadec-Klee, tức là nếu $\{x_n\} \subset H$ là một dãy bất kỳ trong H thỏa mãn các điều kiện $x_n \rightharpoonup x$ và $\|x_n\| \to \|x\|$, thì $x_n \to x$, khi $n \to \infty$.*

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}\|x_n - x\|^2 &= \|x_n\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle + \|x\|^2 \\ &\to 0,\ n \to \infty.\end{aligned}$$

Suy ra $x_n \to x$, khi $n \to \infty$. Mệnh đề được chứng minh. $\square$

Mệnh đề 1.6. *Cho C là một tập con lồi và đóng của không gian Hilbert thực H. Khi đó, tồn tại duy nhất phần tử $x^* \in C$ sao cho*

$$\|x^*\| \leq \|x\| \text{ với mọi } x \in C.$$

Chứng minh. Thật vậy, đặt $d = \inf_{x\in C} \|x\|$. Khi đó, tồn tại $\{x_n\} \subset C$ sao cho $\|x_n\| \longrightarrow d,\ n \longrightarrow \infty$.

Từ đẳng thức hình bình hành, ta có

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\|^2 &= 2(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - 4\|\frac{x_n + x_m}{2}\|^2 \\ &\leq (\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - 4d^2 \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

khi $n, m \longrightarrow \infty$. Do đó $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong H. Suy ra tồn tại $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \in C$ (do $\{x_n\} \subset C$ và C là tập đóng). Do chuẩn là hàm số liên tục nên $\|x^*\| = d$.

Tiếp theo ta chỉ ra tính duy nhất. Giả sử tồn tại $y^* \in C$ sao cho $\|y^*\| = d$. Ta có

$$\|x^* - y^*\|^2 = 2(\|x^*\|^2 + \|y^*\|^2) - 4\|\frac{x^* + y^*}{2}\|^2$$